УДК 539.374.001.8

**Чигиринский В. В.**
**Бень А. Н.**

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОСАДКИ

В работе представлено аналитическое решение плоской задачи теории пластичности. В литературе известны аналитические решения, которые используют в своей основе обобщенное уравнение равновесия с большими упрощениям и допущениями. При решении обобщенного уравнения равновесия Прандтль [1] рассматривает линейную задачу. Смирновым рассматривается плоская задача в напряжениях [2], однако пренебрегается правой частью обобщенного уравнения равновесия. В работе [3] для решения этого уравнения используется метод сплайнов. Анализ литературных источников показал, что не существует полного решения обобщенного уравнения равновесия для определения касательных и нормальных составляющих компонентов тензора напряжений.

Аналитические решения, получаемые с использованием метода гармонических функций в общем определяют качественное и количественное распределение напряжений по длине очага деформаций. Однако, граничные условия, используемые в решении [4–6] недостаточно обоснованы.

Целью работы является определение граничных условий для нахождения полей напряжений в процессе симметричного нагружения.

Постановка задачи включает в себя уравнения теории течения: уравнения равновесия, условия пластичности, уравнения связи скоростей деформаций и напряжений, уравнения несжимаемости для скоростей деформаций, уравнения неразрывности скоростей деформаций, представленные в системе (1):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0;\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0;\quad (\sigma_x-\sigma_y)^2+4\cdot\tau_{xy}{}^2=4\cdot k^2;$$
$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\cdot\tau_{xy}}=\frac{\xi_x-\xi_y}{\gamma'_{xy}}=F_1;\quad \xi_x+\xi_y=0;\quad \frac{\partial^2\xi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma'_{xy}}{\partial y\partial x}, \tag{1}$$

где $\sigma_y$, $\sigma_x$ – нормальные напряжения;

$\tau_{xy}$ – касательное напряжение;

$k$ – сопротивление пластической деформации на сдвиг (переменная величина);

$\xi_x$, $\xi_y$, $\gamma'_{xy}$ – скорости деформаций.

Граничные условия заданы в напряжениях [7]:

$$\tau_n=-k\cdot\sin\left(A\Phi-2\alpha\right)$$

или

$$\tau_n=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\sin 2\cdot\alpha-\tau_{xy}\cdot\cos 2\cdot\alpha\right). \tag{2}$$

Дополнительные условия заданы контактными удельными силами трения (2), изменяющимися по синусоидальному закону.

Решение задачи. Граничное условие (2) будет тождественно удовлетворено, если принять тригонометрический закон распределения контактных удельных сил трения.

$$\tau_{xy}=k\cdot\sin A\Phi. \tag{3}$$

Для этого существуют как физические, так и теоретические предпосылки. Физические предпосылки основываются на том, что в литературе известно достаточное количество экспериментальных данных, показывающих непрерывный характер распределения нормальных и касательных напряжений по длине очага деформации [8]. Примечательно, что в зоне перехода (нейтральное сечение) касательные напряжения достигают нуля и меняют свой знак на противоположный. Форма кривой напоминает синусоиду.

Выражение (3) задает граничные условия (2), которые замыкают систему уравнений (1).

Используя первые три уравнения системы (1) можно записать обобщенное уравнение равновесия в виде [2]:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2} \, . \tag{4}$$

В работе [8] показано, что при разбивке очага деформации на отдельные зоны с разными законами трения получается составная эпюра контактных напряжений. Плавное соединение линий указывает на тригонометрический характер ее распределения.

С математической точки зрения с использованием тригонометрической подстановки в уравнении равновесия (4) появляется возможность избавиться от нелинейности (радикал в правой части) и упростить его решение. Полученное линейное дифференциальное уравнение можно упростить еще с одной подстановкой в него фундаментальной функции вида:

$$k = H_\sigma \cdot \exp\theta \, ,$$

где $H_\sigma$ – переменный коэффициент, принимаемый в дальнейшем равным постоянной величине $C_\sigma$.

В работах [4–6] представлено замкнутое плоское решение задачи теории пластичности с использованием гармонических функций:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(y) + C \, ; \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(x) + C \, ; \\ \tau_{xy} &= C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \sin A\Phi \end{aligned} \tag{5}$$

при условии $\theta_x = -A\Phi_y$; $\theta_y = A\Phi_x$.

Однако при выборе постоянных интегрирования делались определенные допущения, которые не подкреплялись реальными граничными условиями.

В литературе показаны теоретические и экспериментальные исследования, позволяющие корректировать получаемый результат. Общепризнанными являются решения, представленные в работе [8] (рис. 1). Приведенные данные использовались для определения коэффициентов, характеризующих граничные условия в напряжениях.

В работах [4–6] использовались следующие координатные гармонические функции:

$$\begin{aligned} A\Phi &= AA_6 \cdot x \cdot y - AA_{13} \cdot x \cdot y \cdot \left(x^2 - y^2\right); \\ \theta &= -0{,}5 \cdot AA_6 \cdot \left(x^2 - y^2\right) + AA_{13} \cdot \left[0{,}25 \cdot \left(x^4 + y^4\right) - 1{,}5 \cdot x^2 \cdot y^2\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Представленные функции (6) являются гармоническими и представляют собой сумму координатных функций разного порядка.

Для определения координатной функции $A\Phi$ проведем сопоставление с решениями, представленными в работах [8]. В нашем случае имеем:

$$AA_6 = 4 \cdot \frac{arctg(\psi_0)}{l \cdot h}; \quad AA_{13} = 16 \cdot arctg(\psi_1) \cdot \frac{l - 2 \cdot h}{l^3 \cdot h \cdot (l + h)}; \quad \psi_0 = C_{попр} \cdot f \cdot (1 - f); \ \psi_1 = \frac{2}{1{,}7} \cdot \psi_0 \, .$$

Параметр $\psi_0$ является во многом определяющим фактором, регулирующим точность решения. Задачу можно поставить следующим образом: каким граничным условиям соответствует полученное решение, или какая область допустимых значений на границе определяет необходимый результат.

Поправочный коэффициент $C_{попр}$ определялся из условия равенства коэффициента подпора, представленного на рис. 1, и решений (5)…(6). В результате обработки получили данные для определения $\psi_0$ в зависимости от фактора формы $l/h$ и коэффициента трения $f$ (рис. 2), который в данном случае рассматривается как параметр, определяющий точность задания граничных условий.

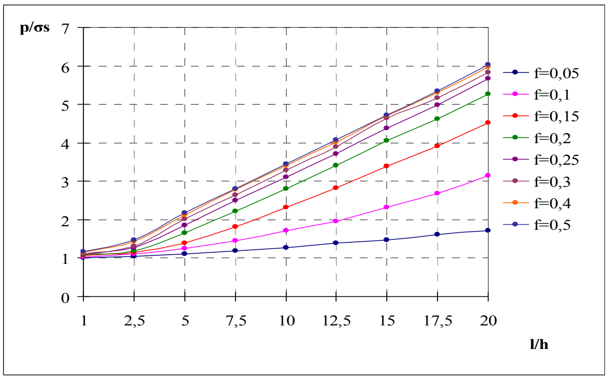



Рис. 1. Удельное давление на контакте в зависимости от коэффициента трения и фактора формы [8]

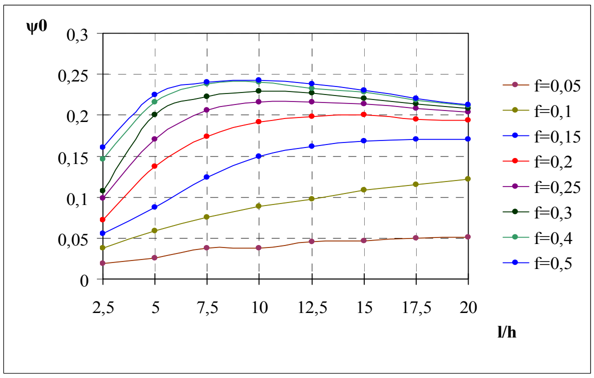
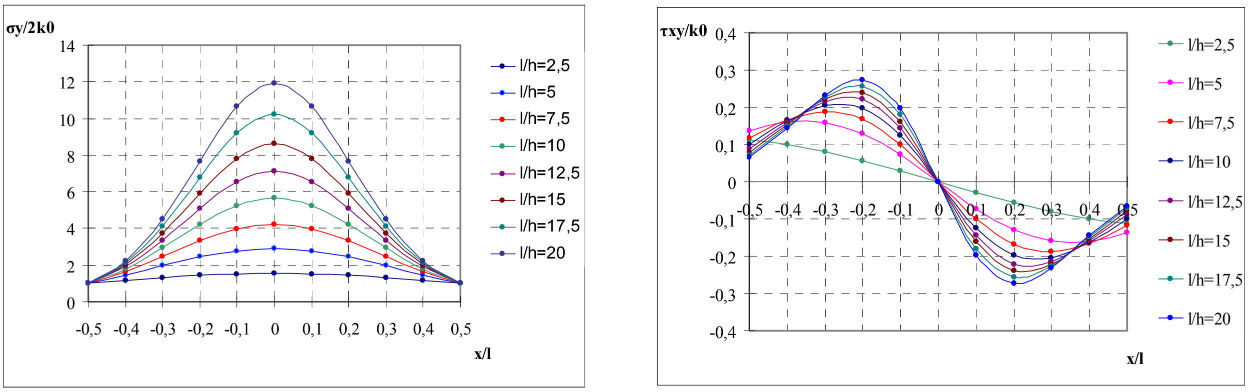



Рис. 2. Зависимость коэффициента $\psi_0$ от коэффициента трения и фактора формы

Из рис. 2 видно, что при небольших коэффициентах трения с увеличением фактора формы $l/h$ наблюдается увеличение коэффициента $\psi_0$. С увеличением коэффициента трения формы кривых имеют куполообразный характер, максимум которых смещается в область малых значений фактора формы $l/h$. При $l/h \prec 2{,}5$ кривые стремятся к пересечению.

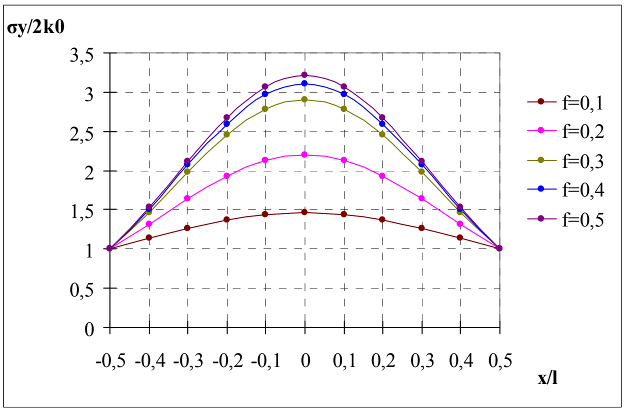
Распределение контактных нормальных и касательных напряжений представлено на рис. 3, 4.



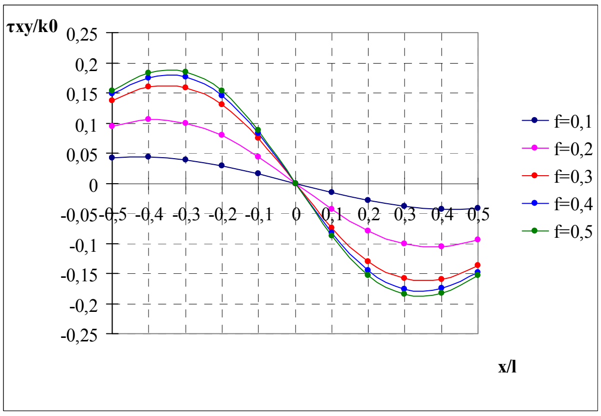

а б

Рис. 3. Распределение относительных нормальных (а) и касательных (б) напряжений по длине очага деформации при осадке $f = 0{,}3$; $l/h = 1 \ldots 20$

Анализ графических зависимостей показывает, что распределение контактных напряжений реагирует на фактор формы $l/h$ очага деформации и коэффициент трения $f$. Полученные результаты качественно и количественно отражают общие закономерности распределения полей тензора напряжений по всему очагу деформации и в полной мере удовлетворяют граничным условиям. Результаты расчетов совпадают с реальными эпюрами контактных напряжений.




а




б

Рис. 4. Распределение относительных нормальных (а) и касательных (б) напряжений по длине очага деформации при осадке $f = 0{,}1 \ldots 0{,}5$ ; $l/h=5$

Особенность решения заключается в том, что отпадает необходимость разбиения очага деформации на отдельные зоны со своими законами трения, включая переходной участок. Равенство средних контактных напряжений полученных решений и значений, предоставленных на рис. 2, обеспечивает надежность расчета, как по качественным параметрам, так и по количественным.

## ВЫВОДЫ

Определена область допустимых значений для расчета контактных напряжений с использованием общепринятых данных работы [8]. Расчет напряжений показывает, что они качественно и количественно соответствуют экспериментальным данным.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prandtl L. // Z.A.M.M. – Bd. 3. H. 6. S. 401–406.*

2. *Смирнов В. С. Теория обработки металлов давлением [Текст] / В. С. Смирнов. – М. : Металлургия, 1973. – 496 с.*

3. *Максименко О. П. Развитие теории смазочного действия и совершенствование процесса прокатки на ее основе [Текст] : дис. д-ра техн. наук : 05.03.05 / О. П. Максименко. – Днепродзержинск, 1992. – 564 с.*

4. *A Generalised Theory of Plasticity [Text] / V. V. Chygyryns'kyy, A. Ya. Kachan, I. Mamuzić, A. N. Ben' // Materials and Technology. Institute of Metals and Technology. – Liubljana, Slovenija. – POB 431. – 2010. – P. 141–145.*

5. *Чигиринский В. В. Обобщенная теория пластичности. Модель сложной пластической среды [Текст] / В. В. Чигиринский, А. Я. Качан, А. Н. Бень // Вестник национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». – Киев, 2008. – С. 141–148.*

6. *Чигиринский В. В. Некоторые особенности обобщенной теории пластичности для упрочняющейся среды [Текст] / В. В. Чигиринский, А. Н. Бень // Вестник двигателестроения. – Запорожье, 2008. – № 2. – С. 8–12.*

7. *Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 399 с.*

8. *Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением [Текст] / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М. : Машиностроение, 1977. – 424 с.*

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф., зав. каф. ЗНТУ;

Бень А. Н. – ассистент ЗНТУ.

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: valerij@zntu.edu.ua; BenAnna1985@yandex.ru

*Статья поступила в редакцию 01.03.2012 г.*